Teoremi di EUCLIDE

Se due triangoli rettangoli sono tali che un angolo acuto dell'uno è uguale ad un angolo acuto dell'altro, avranno uguali i due rimanenti angoli, quello acuto e quello retto, quindi sono simili per il primo criterio.

Primo teorema di EUCLIDE

Teorema

In ogni triangolo rettangolo un **cateto** è **medio proporzionale** fra l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Conduciamo nel triangolo rettangolo *ABC*, l'altezza *AH* relativa all'ipotenusa *BC*; i segmenti *BH* ed *HC* sono rispettivamente le **proiezioni** dei cateti *AB* ed *AC* sull'ipotenusa (fig. 15.4).

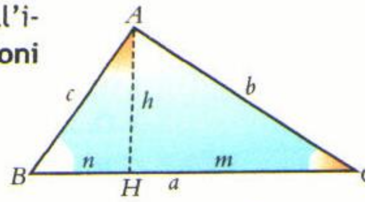

Figura 15.4

Osserviamo che i due triangoli rettangoli *ABC* ed *ABH*, avendo $\widehat{B}$ in comune, hanno ordinatamente uguali anche gli altri angoli; quindi sono simili per il primo criterio e perciò:

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BH} \quad \text{da cui si trae } \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}.$$

Quindi il 1° teorema di EUCLIDE si può anche enunciare come segue.

Il quadrato costruito su un cateto di un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Perciò se m ed n sono le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa ed a, b e c le misure dell'ipotenusa e dei due cateti, si ha:

$$c^2 = a \cdot n, \quad b^2 = a \cdot m, \quad \text{da cui:} \quad c = \sqrt{a \cdot n}, \quad b = \sqrt{a \cdot m},$$

ovvero:

in un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale alla radice quadrata del prodotto delle misure dell'ipotenusa e della proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Ad esempio, calcolare l'area di un triangolo rettangolo ABC sapendo che il cateto AB e la sua proiezione BH sull'ipotenusa sono lunghi rispettivamente 15 cm *e* 9 cm.

Per il primo teorema di EUCLIDE, si ha, in cm:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}, \quad \text{ossia:} \quad 15^2 = 9 \cdot \overline{BC}, \quad \text{quindi:} \quad \overline{BC} = \frac{15^2}{9} = \frac{225}{9} = 25,$$

e quindi: $\overline{HC} = (25 - 9) = 16.$

Sempre per il primo teorema di EUCLIDE si ha, in cm:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{HC}} = \sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{400} = 20.$$

Quindi l'area del dato triangolo è data da, in cm^2:

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150.$$

Secondo teorema di EUCLIDE

Teorema

In ogni triangolo rettangolo l'**altezza relativa all'ipotenusa** è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Infatti i due triangoli rettangoli ABH ed AHC avendo $A\widehat{H}B = A\widehat{H}C$ perché retti ed $A\widehat{B}H = H\widehat{A}C$ perché complementari dello stesso angolo $B\widehat{A}H$, sono simili, quindi:

$$\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{HC}, \quad \text{da cui si trae} \quad \overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}.$$

Quindi il secondo teorema di EUCLIDE si può anche enunciare così.

In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

Perciò indicando con h la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa a, e con m ed n quelle delle proiezioni dei due cateti, si ha:

$$h^2 = m \cdot n, \qquad \text{da cui:} \quad h = \sqrt{m \cdot n},$$

ossia:

la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla radice quadrata del prodotto delle misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

Esempio

In un triangolo rettangolo ABC, il cateto AB e l'ipotenusa BC misurano rispettivamente 21 cm *e* 35 cm. *Determinare la misura della proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'altezza a questa relativa.*

Per il primo teorema di EUCLIDE, si ha in cm:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \quad \text{cioè} \quad 21^2 = 35 \cdot \overline{BH}, \quad \text{quindi} \quad \overline{BH} = \frac{21^2}{35} = \frac{441}{35} = 12{,}6.$$

Si ha poi in cm: $\overline{HC} = \overline{BC} - \overline{BH} = (35 - 12{,}6) = 22{,}4.$

Quindi per il secondo teorema di EUCLIDE, si ha, in cm:

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}, \quad \text{cioè} \quad \overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{HC}} = \sqrt{12{,}6 \cdot 22{,}4} = \sqrt{282{,}64} = 16{,}8\ .$$