Prodotti notevoli

Prodotti notevoli: sono identità che si ottengono da moltiplicazioni di polinomi i cui risultati si deducono rapidamente applicando determinate regole.
Nella scrittura in simboli di queste identità utilizziamo lettere maiuscole per indicare i monomi.

Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

È un binomio costituito dalla **differenza** tra il **quadrato** del **primo** monomio e il **quadrato** del **secondo** monomio.

ESEMPI

- $(2a+x^2)(2a-x^2)=4a^2-x^4$
- $\left(\frac{1}{3}x-\frac{6}{5}y\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{6}{5}y\right)=\frac{1}{9}x^2-\frac{36}{25}y^2$

Quadrato di un binomio

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$

È un trinomio formato dal **quadrato** del **primo** termine, dal **doppio prodotto** del primo termine per il secondo termine e dal **quadrato** del **secondo** termine.

- I quadrati sono sempre **positivi**
- Il doppio prodotto ha segno
  - $-$ se i monomi sono **discordi**
  - $+$ se i monomi sono **concordi**

ESEMPI

- $(3x+2y)^2=(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot(2y)+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$
- $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2\right)^2=\underbrace{\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2}_{\text{quadrato del primo termine}}+\underbrace{2\cdot\left(\frac{1}{2}a^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}b^2\right)}_{\text{doppio prodotto del primo termine per il secondo}}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}b^2\right)^2}_{\text{quadrato del secondo termine}}=\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^2b^2+\frac{1}{9}b^4$

Quadrato di un trinomio

È un polinomio di sei termini costituito dal **quadrato** di ciascuno dei termini del trinomio e dal **doppio prodotto** di ciascuno di essi per ognuno di quelli che lo seguono.

$$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

ESEMPIO

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{2}x^2+y\right)^2=$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3}x\right)^2}_{\text{quadrato del primo termine}}+\underbrace{\left(-\frac{5}{2}x^2\right)^2}_{\text{quadrato del secondo termine}}+\underbrace{(y)^2}_{\text{quadrato del terzo termine}}+\underbrace{2\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}x^2\right)}_{\text{doppio prodotto del primo per il secondo}}+\underbrace{2\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)\cdot(y)}_{\text{doppio prodotto del primo per il terzo}}+\underbrace{2\cdot\left(-\frac{5}{2}x^2\right)\cdot(y)}_{\text{doppio prodotto del secondo per il terzo}}=$$

$$\frac{4}{9}x^2+\frac{25}{4}x^4+y^2-\frac{10}{3}x^3+\frac{4}{3}xy-5x^2y$$

Cubo di un binomio

È un quadrinomio costituito dal **cubo** del primo termine, dal **triplo prodotto** del quadrato del primo termine per il secondo termine, dal **triplo prodotto** del primo termine per il quadrato del secondo termine e dal **cubo** del secondo termine.

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

ESEMPI

- $(3x-2y)^3=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot(-2y)+3(3x)\cdot(-2y)^2+(-2y)^3=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
- $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)^3=\underbrace{\left(\frac{1}{3}x\right)^3}_{\text{cubo del primo termine}}+\underbrace{3\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}y\right)}_{\text{triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo}}+\underbrace{3\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}y\right)^2}_{\text{triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}y\right)^3}_{\text{cubo del secondo termine}}=$

$$\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{6}x^2y+\frac{1}{4}xy^2+\frac{1}{8}y^3$$