IL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

UNITÀ

12

Eventi aleatori e probabilità

Un evento si dice **aleatorio**, o **casuale**, se il suo verificarsi o meno dipende esclusivamente dal caso. Esso può essere:

- **certo**, se il suo verificarsi è sicuro;
- **probabile**, se può verificarsi ma non sicuramente;
- **impossibile**, se non potrà assolutamente verificarsi.

La probabilità matematica $\boldsymbol{p(E)}$ di un evento casuale $\boldsymbol{E}$ è il **rapporto** fra il numero di casi favorevoli $\boldsymbol{f}$ e il numero di tutti i casi ugualmente possibili $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{p(E) = \frac{f}{n}}$, essa è sempre un numero compreso fra 0 e 1: $\boldsymbol{0 \leq p(E) \leq 1}$.

Eventi aleatori e probabilità

In modo più completo, tenendo presente che un evento aleatorio può essere certo, probabile, impossibile, ma anche più o meno probabile, abbiamo i seguenti casi:

$p(E) = 0$ — Evento impossibile

$0 < p(E) < \frac{1}{2}$ — Evento improbabile

$p(E) = \frac{1}{2}$ — Evento incerto

$\frac{1}{2} < p(E) < 1$ — Evento probabile

$p(E) = 1$ — Evento certo

La legge empirica del caso

- Il numero di volte che un evento aleatorio si verifica durante un certo numero di prove effettuate si chiama **frequenza assoluta**, f, dell'evento.
- Il rapporto fra la frequenza assoluta dell'evento E e il numero n di prove effettuate si chiama **frequenza relativa**, $F(E)$, dell'evento:

$$F(E) = \frac{\textbf{frequenza assoluta}}{n} = \frac{f}{n}$$

Sottoponendo un evento casuale E a un gran numero di prove, sempre nelle stesse condizioni, la frequenza relativa $F(E)$ si approssima sempre più alla probabilità $p(E)$ dell'evento stesso e tende a coincidere con la probabilità matematica all'aumentare del numero di prove.

Eventi incompatibili

Consideriamo l'estrazione di una biglia dal sacchetto a fianco ed esaminiamo i due eventi:

- E_1: "estrarre una biglia blu"
- E_2: "estrarre una biglia verde"

E_1: "estrarre una biglia blu" $\rightarrow$ $p(E_1) = \frac{3}{17}$

E_2: "estrarre una biglia verde" $\rightarrow$ $p(E_2) = \frac{9}{17}$

La probabilità dell'evento "estrarre una biglia blu o una biglia verde" è uguale a: $\boldsymbol{p(E_1 \text{ o } E_2) = \frac{12}{17}}$ che è la somma delle probabilità dei due eventi: $\boldsymbol{p(E_1) + p(E_2)} = \frac{3}{17} + \frac{9}{17} = \frac{12}{17}$.

Eventi incompatibili

- Due eventi aleatori sono **incompatibili** se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro e può anche accadere che nessuno dei due si verifichi.
- Dati due eventi aleatori **incompatibili**, E_1 ed E_2, **la probabilità** che si verifichi o l'uno o l'altro **è data dalla somma delle probabilità** di ciascuno dei due eventi: $\boldsymbol{p(E_1 \text{ o } E_2) = p(E_1) + p(E_2)}$.

Eventi compatibili

Consideriamo l'estrazione di una carta da gioco da un mazzo di carte siciliane ed esaminiamo i due eventi possibili:

- E_1: "esce una carta di denari"
- E_2: "esce un quattro"

Qual è la probabilità che, fra due eventi compatibili, si verifichi uno dei due? Consideriamo il nostro esempio e calcoliamo la probabilità dei due eventi:

E_1: "esce una carta di denari" $\rightarrow p(E_1) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

E_2: "esce un quattro" $\rightarrow p(E_2) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

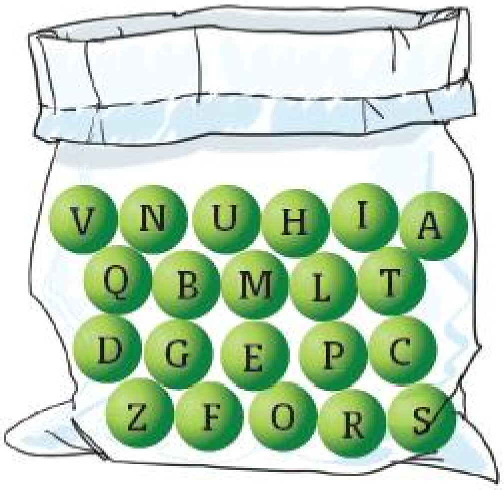
Osserviamo che la probabilità dell'evento "esce una carta di denari o un quattro" non può essere la somma delle due probabilità, perché facendo la somma conteremmo due volte la probabilità $p(E) = \frac{1}{40}$ dell'evento comune E: "esce il quattro di denari". Nel caso di due eventi compatibili quindi la probabilità che se ne verifichi uno è:

$$\boldsymbol{p(E_1 \text{ o } E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}}$$

Eventi compatibili

- Due eventi casuali E_1 ed E_2 sono **compatibili** se il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro: è possibile quindi che si verifichino entrambi contemporaneamente.
- Dati due eventi aleatori **compatibili**, E_1 ed E_2, **la probabilità** che si verifichi almeno uno dei due **è data dalla somma delle probabilità** di ciascuno dei due eventi **meno la probabilità che si verifichino entrambi**:
$\boldsymbol{p(E_1 \text{ o } E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \text{ e } E_2)}$.

Eventi complementari



Consideriamo l'estrazione di un dischetto dal sacchetto a fianco, che contiene le 21 lettere dell'alfabeto italiano, ed esaminiamo i due eventi possibili:

- E_1: "estrarre una consonante"
- E_2: "estrarre una vocale"

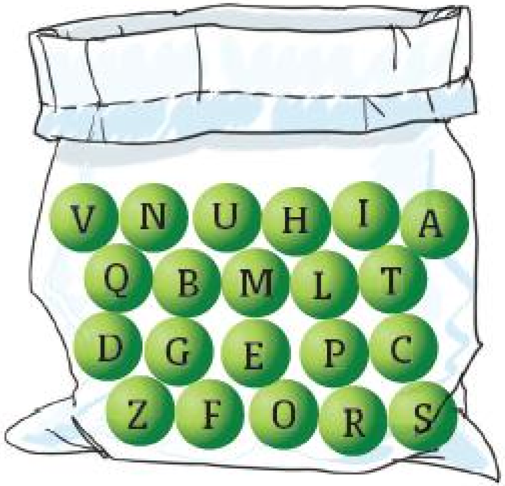
E_1: "estrarre una consonante" $\rightarrow p(E_1) = \frac{16}{21}$

E_2: "estrarre una vocale" $\rightarrow p(E_2) = \frac{5}{21}$

Se consideriamo l'evento E: "estrarre una consonante o una vocale" otteniamo l'evento certo, per il quale quindi deve essere $p(E) = 1$; eseguendo la somma delle probabilità otteniamo infatti:

$$\boldsymbol{p(E) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{16}{21} + \frac{5}{21} = \frac{21}{21} = 1}$$

Eventi complementari



- Due eventi casuali E_1 ed E_2 sono **complementari** se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, ma uno dei due si verificherà certamente.
- Due eventi complementari sono sempre incompatibili, ma due eventi incompatibili non sono necessariamente complementari.
- La **somma delle probabilità di due eventi complementari** è uguale a **1**.