RAPPORTI E PROPORZIONI

Il rapporto

Dati due numeri a e b (con $b \neq 0$), si chiama:

- **rapporto diretto** fra i due numeri il quoziente ottenuto dividendo il primo per il secondo $a : b$, oppure $\frac{a}{b}$;
- **rapporto inverso** fra i due numeri il quoziente ottenuto dividendo il secondo per il primo $b : a$, oppure $\frac{b}{a}$ (con $a \neq 0$).

dividendo ↖ $a : b$ ↗ divisore

antecedente ↙ $a : b$ ↘ conseguente

numeratore ↖ $\frac{a}{b}$ ↗ antecedente

denominatore ↙ $\frac{a}{b}$ ↘ conseguente

Rapporto fra grandezze

Il rapporto fra due **grandezze omogenee** è il quoziente fra le loro misure (espresse nella stessa unità di misura) ed è un **numero puro**.

42 kg e 75 kg → **42 kg** : **75 kg** = **0,56**

420 hg e 750 hg → **420 hg** : **750 hg** = **0,56**

Il rapporto fra due **grandezze non omogenee** è il quoziente fra le loro misure e ci dà una nuova grandezza non omogenea a quelle date, detta **grandezza derivata**, il cui valore dipende dalle unità di misura delle due grandezze date.

distanza : **tempo** = **270 km** : **3 ore** = **90 km/h**

La percentuale

La **percentuale** è un **rapporto avente come conseguente 100** e, su un totale, indica quante unità rispetto a 100 soddisfano una certa condizione.

tasso percentuale → 20% ← simbolo di percentuale

$$\underbrace{20\%}_{\text{percentuale}}$$

La percentuale

Per esprimere:

- **un numero decimale come percentuale** si considera il numero arrotondato alla cifra dei centesimi e si scrive la frazione decimale relativa; il suo numeratore è il tasso percentuale corrispondente:

$$0{,}27 = \frac{27}{100} = 27\%$$

$$0{,}456 \cong 0{,}46 = \frac{46}{100} = 46\%$$

- **una frazione come percentuale** si trasforma la frazione in una equivalente con denominatore 100; il suo numeratore è il tasso percentuale corrispondente:

$$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \mathbf{30\%} \qquad \frac{11}{25} = \frac{44}{100} = \mathbf{44\%} \qquad \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = \mathbf{75\%}$$

Se è impossibile trasformare la frazione in una equivalente con denominatore 100, si procede dividendo il numeratore per il denominatore e quindi trasformando il numero decimale ottenuto in percentuale, come indicato prima:

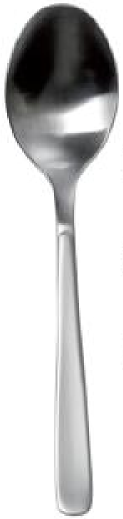
$$\frac{11}{22} = 11 : 22 = 0{,}5 = \frac{50}{100} = \mathbf{50\%}.$$

Ridurre o ingrandire in scala

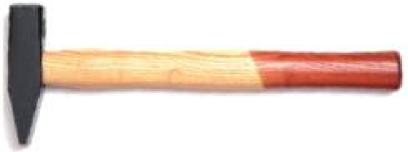
Scala di riduzione

Si dice che un oggetto è riprodotto, ad esempio, in **scala di riduzione 1 : 4** (leggi "scala uno a quattro") se le sue dimensioni sono quattro volte minori delle dimensioni effettive, cioè se il **rapporto fra le dimensioni del disegno e le dimensioni reali è di $\frac{1}{4}$**.
Per avere le dimensioni reali bisogna quindi, in questo caso, moltiplicare per 4 le dimensioni del disegno.

La **scala di riduzione** è il **rapporto** fra la misura delle dimensioni sulla carta e la misura delle stesse dimensioni nella realtà.
Essa quindi indica quante volte la misura reale è stata ridotta sulla carta.



Scala 1 : 4
Il cucchiaio nel disegno misura 5,5 cm, nella realtà misurerà quindi
$(5{,}5 \times 4)$ cm = 22 cm



Scala 1 : 5
Il martello nel disegno è lungo 4,4 cm, nella realtà misurerà quindi
$(4{,}4 \times 5)$ cm = 22 cm

Ridurre o ingrandire in scala

Scala di ingrandimento

Si dice che un oggetto è stato disegnato, ad esempio, in **scala di ingrandimento 2 : 1** se le sue dimensioni sono due volte maggiori delle dimensioni effettive, ovvero se il **rapporto fra le dimensioni del disegno e quelle reali è 2**.
Per avere le dimensioni reali bisogna quindi, in questo caso, dividere per 2 le dimensioni del disegno.

Scala 2 : 1
La foglia nel disegno è lunga 3 cm, nella realtà misura
(3 : 2) cm = 1,5 cm

La **scala di ingrandimento** è il **rapporto** fra la misura delle dimensioni sulla carta e la misura delle stesse dimensioni nella realtà.
Essa quindi indica quante volte la misura reale è stata ingrandita sulla carta.

Le proporzioni

3	:	4	=	6	:	8
tre	sta	a quattro	come	sei	sta	a otto

Si chiama **proporzione** l'uguaglianza di due rapporti.

antecedenti

$$a : b = c : d$$

conseguenti

estremi

$$a : b = c : d$$

quarto proporzionale

medi

medio proporzionale

$$a : b = b : d$$

terzo proporzionale

La proprietà fondamentale delle proporzioni

In ogni proporzione il **prodotto degli estremi è** sempre **uguale al prodotto dei medi**.

Se $a : b = c : d$

allora $a \cdot d = b \cdot c$

Altre proprietà delle proporzioni

La proprietà dell'invertire

Se in una proporzione si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente si ottiene ancora una proporzione.

Da

$$a : b = c : d$$

segue

$$b : a = d : c$$

Altre proprietà delle proporzioni

La proprietà del permutare

Se in una proporzione si scambiano tra loro gli estremi, o i medi o entrambi si ottengono ancora altre proporzioni.

Da

$$a : b = c : d$$

segue

$$d : b = c : a$$
$$a : c = b : d$$
$$d : c = b : a$$

Altre proprietà delle proporzioni

La proprietà del comporre e dello scomporre

In ogni proporzione la somma del 1° e 2° termine sta al 1° o al 2° termine come la somma del 3° e del 4° termine sta al 3° o al 4° termine.

Da

$$a : b = c : d$$

segue

$$(a + b) : a = (c + d) : c$$

e

$$(a + b) : b = (c + d) : d$$

Altre proprietà delle proporzioni

La proprietà del comporre e dello scomporre

In ogni proporzione (con gli antecedenti maggiori dei rispettivi conseguenti) la differenza fra il 1° e il 2° termine sta al 1° o al 2° termine come la differenza fra il 3° e il 4° termine sta al 3° o al 4° termine.

Da

$$a : b = c : d$$

segue

$$(a - b) : a = (c - d) : c$$

e

$$(a - b) : b = (c - d) : d$$

Ricerca del termine incognito di una proporzione

In una proporzione il valore di un **estremo** è dato dal prodotto dei medi diviso l'estremo noto; il valore di un **medio** è dato dal prodotto degli estremi diviso il medio noto.

In una **proporzione continua** il valore del **medio proporzionale** è dato dalla radice quadrata del prodotto degli estremi.

Uguaglianza di più rapporti

Oltre all'uguaglianza di due soli rapporti è possibile considerare l'uguaglianza di tre o più rapporti.
Ad esempio, dati i tre rapporti uguali $30 : 10 = 3$, $9 : 3 = 3$ e $15 : 5 = 3$, possiamo scrivere l'uguaglianza $\mathbf{30} : \mathbf{10} = \mathbf{9} : \mathbf{3} = \mathbf{15} : \mathbf{5}$ che prende il nome di **catena di rapporti**.
In una catena di rapporti si può applicare la proprietà del comporre.
Osserva: $\mathbf{48} : \mathbf{6} = \mathbf{64} : \mathbf{8} = \mathbf{40} : \mathbf{5}$.

- $(48 + 64 + 40) : (6 + 8 + 5) = 48 : 6 \rightarrow \mathbf{152} : \mathbf{19} = \mathbf{48} : \mathbf{6}$
- $(48 + 64 + 40) : (6 + 8 + 5) = 64 : 8 \rightarrow \mathbf{152} : \mathbf{19} = \mathbf{64} : \mathbf{8}$
- $(48 + 64 + 40) : (6 + 8 + 5) = 40 : 5 \rightarrow \mathbf{152} : \mathbf{19} = \mathbf{40} : \mathbf{5}$

In una catena di rapporti la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente.